

Der Einfluß des Entladungsgefäßes auf die Bestimmung der Plasmaelektronendichte mit Hohlraumresonatoren

G. JANZEN

Institut für Gasentladungstechnik und Photoelektronik der Universität Stuttgart

(Z. Naturforsch. 27 a, 491—499 [1972]; eingegangen am 12. November 1971)

The Influence of the Discharge Tube on the Determination of the Plasma Electron Density by Means of Cavity Resonators

The eigenvalue equation of a plasma-discharge tube configuration in a cylindrical microwave cavity is derived and solved numerically by an exact theory for TM_{lm0} , TM_{0mn} , and TE_{0mn} resonance modes. The radial and axial electron density profiles are assumed to be homogeneous.

The factors of proportionality between electron density and shift of the resonance frequency derived from the linear perturbation theory are compared with the exactly computed eigenvalues. Hence the range of validity of the linearly computed factors of proportionality (geometry factors) can be established.

By considering the influence of the discharge tube the geometry factors are altered and consequently the sensitivity of the measurement. The influence of the discharge tube can be taken into account by means of suitable correction factors.

In der sogenannten „exakten Theorie“ des Hohlraumresonators kann der Zusammenhang zwischen den Eigenwerten und den elektrischen Stoffkonstanten beliebiger Resonatorfüllungen berechnet werden.

Ziel der exakten Theorie des Resonators im Hinblick auf eine plasmaphysikalische Anwendung ist, die Resonanzfrequenzen eines ganz oder teilweise mit Plasma beliebig hoher Elektronendichte gefüllten Hohlraumresonators zu bestimmen.

Vereinzelte wurden hierüber Berechnungen angestellt, die sich auf mathematisch einfach zu behandelnde Moden und auf kleine Plasma-Resonator-Radiusverhältnisse beschränkten¹⁻⁴. Das Problem der Modenkopplung wurde von AGDUR und ENANDER⁵ behandelt: beim Einbringen eines Dielektrikums mit radialen Dichtegradienten treten Mischformen der transversal elektrischen (TE) und transversal magnetischen (TM) Moden auf. Die Sonderfälle der TM_{lm0} , TM_{0mn} - und TE_{0mn} -Moden sind stets „reine“ Moden; wir beschränken uns hier auf diese Schwingungstypen. Abbildung 1 zeigt den prinzipiellen Verlauf der elektrischen Feldstärke innerhalb kreiszylindrischer Hohlraumresonatoren für die Resonanzmoden TE_{011} , TM_{020} und TM_{110} .

SHOHET^{6,7} sowie SHOHET und MOSKOWITZ⁸ untersuchten den Einfluß der Stoßfrequenz auf die Eigenwerte einiger TE-Moden und des TM_{010} -Modus, und THOMASSEN⁹, GREGORY³ und LUKÁČ¹⁰

den Einfluß der Endlöcher eines TM_{010} -Resonators, durch die das Plasma eingebracht wird.

Die Bestimmung des Einflusses des Entladungsgefäßes auf die Resonanzfrequenz und auf die Meß-

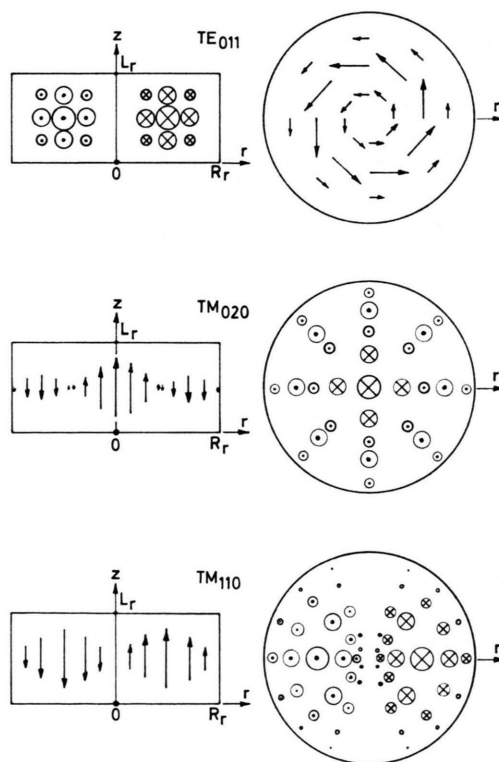


Abb. 1. Qualitativer Verlauf der elektrischen Feldstärke der Resonanzmoden TE_{011} , TM_{020} und TM_{110} .

Reprint requests to Dr.-Ing. G. JANZEN, Institut für Plasmaforschung, Universität Stuttgart, D-7000 Stuttgart 80, Pfaffenwaldring 31.



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitalized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

empfindlichkeit wurde bisher nur für den TM_{010} -Modus gemacht^{3, 11}.

In den Arbeiten^{12, 13} wurden von der Rechteckform abweichende radiale Elektronendichteprofile berücksichtigt. SHOHET und HATCH¹² nähern bei ihren Rechnungen das Profil durch eine zehnschalige Anordnung für das Radialprofil an, BLEVIN und REYNOLDS¹³ nehmen für eine analytische Lösung parabelähnliche Profile an.

In dieser Arbeit wird ein homogenes Radialprofil der Elektronendichte vorausgesetzt.

1. Eigenwertgleichungen des Hohlraumresonators

Ausgehend von r, φ, z -Komponenten der Maxwell-Gleichungen in Zylinderkoordinaten läßt sich unter der Annahme, daß die Feldgrößen \mathbf{E} und \mathbf{H} bzw. \mathbf{B} zeitlich rein harmonisch schwingen, und daß die Ausbreitung der Felder ungedämpft mit dem Phasenfaktor β in z -Richtung erfolgt, die z -Komponente der Feldgrößen gewinnen¹⁴:

$$\begin{aligned} E_z &= [E_{z0} J_l(r \sqrt{k^2 - \beta^2}) \\ &\quad + E_{z1} N_l(r \sqrt{k^2 - \beta^2})] e^{il\varphi} e^{j(\omega t - \beta z)}, \\ B_z &= [B_{z0} J_l(r \sqrt{k^2 - \beta^2}) \\ &\quad + B_{z1} N_l(r \sqrt{k^2 - \beta^2})] e^{il\varphi} e^{j(\omega t - \beta z)}. \end{aligned} \quad (1)$$

J_l Zylinderfunktion 1. Gattung l -ter Ordnung, N_l Zylinderfunktion 2. Gattung l -ter Ordnung. E_{z0} , E_{z1} , B_{z0} , B_{z1} sind Integrationskonstanten; weiter gilt:

$$k^2 = (\omega^2/c^2) \varepsilon \quad (2)$$

($\omega = 2\pi f$ Kreisfrequenz, c Lichtgeschwindigkeit) mit der Dielektrizitätskonstante ε .

Die Radial- und Azimutalkomponenten lauten:

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{j\omega}{k^2 - \beta^2} \left[-\frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \varphi} - \frac{\beta}{\omega} \frac{\partial E_z}{\partial r} \right] \cdot e^{j(\omega t - \beta z)}, \\ B_r &= \frac{j\omega}{k^2 - \beta^2} \left[-\frac{\beta}{\omega} \frac{\partial B_z}{\partial r} + \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} \right] \cdot e^{j(\omega t - \beta z)}, \\ E_\varphi &= \frac{j\omega}{k^2 - \beta^2} \left[\frac{\partial B_z}{\partial r} - \frac{\beta}{\omega} \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} \right] \cdot e^{j(\omega t - \beta z)}, \\ B_\varphi &= \frac{j\omega}{k^2 - \beta^2} \left[-\frac{\beta}{\omega} \frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \varphi} - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial r} \right] \cdot e^{j(\omega t - \beta z)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Die Gln. (1) bis (3) werden nun auf eine Plasma-Plasmabehälter-Konfiguration im Resonator angewandt wie in Abb. 2 angegeben.

Im Gebiet $0 \leq r \leq R_p$ (R_p Plasmaradius) sind die Gleichungen auf das räumlich homogene Plasma

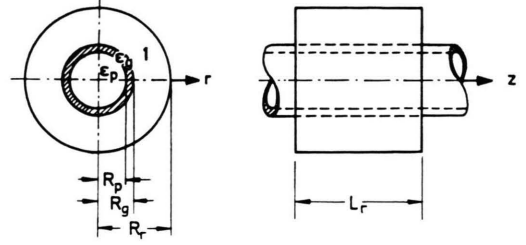


Abb. 2. Anordnung des Plasmas und des Entladungsgefäßes im kreiszylindrischen Hohlraumresonator.

mit der relativen Dielektrizitätskonstante

$$\varepsilon_p = 1 - (\omega_p/\omega)^2 \quad (4)$$

anzuwenden. ω_p ist die Plasmafrequenz, die mit der Elektronendichte n_e des Plasmas verknüpft ist:

$$\omega_p = \sqrt{n_e e^2 / \varepsilon_0 m_e} \quad (5)$$

(e Elementarladung, m_e Elektronenmasse).

In Gl. (4) ist die Stoßfrequenz ν als sehr klein gegen die Resonanzfrequenz ω angenommen und daher vernachlässigt. Innerhalb des Gebietes $R_p \leq r \leq R_g$ (R_g Behälterradius) gilt die Dielektrizitätskonstante ε_g des Entladungsgefäßes und im Gebiet $R_g \leq r \leq R_r$ (R_r Resonatorradius) die Dielektrizitätskonstante $\varepsilon = 1$.

Mit diesen Angaben und der Forderung, daß die Felder in der Achse ($r=0$) endlich bleiben, folgen die Beziehungen (die Größen $A \dots K$ sind Konstanten; der Faktor $e^{j(\omega t - \beta z)}$ ist weggelassen):

Plasma $0 \leq r \leq R_p$

$$\begin{aligned} E_z &= A J_l(r a_p) e^{il\varphi}, \quad B_z = B J_l(r a_p) e^{il\varphi}, \\ E_\varphi &= \frac{j\omega}{a_p^2} \left[B J_l'(r a_p) - \frac{j\beta l}{\omega r} A J_l(r a_p) \right] e^{il\varphi}, \\ B_\varphi &= \frac{-j\beta}{a_p^2} \left[\frac{\varepsilon_p \omega}{\beta c^2} A J_l'(r a_p) + \frac{j l}{r} B J_l(r a_p) \right] e^{il\varphi}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{mit} \quad a_p^2 = k_p^2 - \beta^2 = (\omega^2/c^2) \varepsilon_p - \beta^2, \quad (7)$$

Plasmabehälter $R_p \leq r \leq R_g$

$$\begin{aligned} E_z &= [C J_l(r a_g) + D N_l(r a_g)] e^{il\varphi}, \\ B_z &= [E J_l(r a_g) + F N_l(r a_g)] e^{il\varphi}, \\ E_\varphi &= \frac{j\omega}{a_g^2} \left[E J_l'(r a_g) + F N_l'(r a_g) \right. \\ &\quad \left. - \frac{j\beta l}{\omega r} [C J_l(r a_g) + D N_l(r a_g)] \right] e^{il\varphi}, \\ B_\varphi &= \frac{-j\beta}{a_g^2} \left[\frac{\varepsilon_g \omega}{\beta c^2} [C J_l'(r a_g) + D N_l'(r a_g)] \right. \\ &\quad \left. + \frac{j l}{r} [E J_l(r a_g) + F N_l(r a_g)] \right] e^{il\varphi}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\text{mit} \quad a_g^2 = k_g^2 - \beta^2 = (\omega^2/c^2) \varepsilon_g - \beta^2. \quad (9)$$

Vakuum $R_g \leq r \leq R_r$

$$E_z = [G J_l(r a_0) + H N_l(r a_0)] e^{il\varphi},$$

$$B_z = [I J_l(r a_0) + K N_l(r a_0)] e^{il\varphi},$$

$$E_\varphi = \frac{j\omega}{a_0^2} \left[[I J_l'(r a_0) + K N_l'(r a_0)] - \frac{j\beta l}{\omega r} [G J_l(r a_0) + H N_l(r a_0)] \right] e^{il\varphi}, \quad (10)$$

$$B_\varphi = \frac{-j\beta}{a_0^2} \left[\frac{\omega}{\beta c^2} [G J_l'(r a_0) + H N_l'(r a_0)] + \frac{j l}{r} [I J_l(r a_0) + K N_l(r a_0)] \right] e^{il\varphi},$$

$$\text{mit} \quad a_0^2 = k_0^2 - \beta^2 = (\omega^2/c^2) - \beta^2. \quad (11)$$

An den beiden Grenzflächen $r = R_p$ und $r = R_g$ ist die Stetigkeit der φ - und z -Komponenten der Felder gefordert, während an der gut leitenden Resonatorinnenwand $r = R_r$ die elektrischen Feldstärkekomponenten verschwinden müssen. Dasselbe gilt für das Radialfeld E_r an den Stirnflächen $z = 0$ und $z = L_r$ (L_r Resonatorlänge), woraus direkt folgt

$$\beta = n\pi/L_r, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (12)$$

Aus den sich ergebenden 10 Gleichungen lassen sich die 10 Unbekannten $A \dots K$ eliminieren. Man erhält dann für die nicht gekoppelten, sogenannten „reinen“ Resonanzmoden TE_{0mn} , TM_{0mn} , TM_{lm0} die Eigenwertgleichungen

TE_{0mn} -Moden

$$\frac{a_g}{a_p} \frac{J'_{11}}{J_{11}} (J_{21} N'_{22} - J'_{22} N_{21}) + (J'_{22} N'_{21} - J'_{21} N_{22}) \\ \frac{a_g}{a_p} \frac{J'_{11}}{J_{11}} (J_{22} N_{21} - J_{21} N_{22}) + (J'_{21} N_{22} - J_{22} N'_{21}) \\ + \frac{(J'_{33} N'_{32} - J'_{32} N_{33})}{(J_{33} N_{32} - J_{32} N_{33})} = 0. \quad (13)$$

TM_{0mn} - und TM_{lm0} -Moden

$$\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_g} \frac{a_g}{a_p} \frac{J'_{11}}{J_{11}} (J_{21} N'_{22} - J'_{22} N_{21}) + (J'_{22} N'_{21} - J'_{21} N_{22}) \\ \frac{a_0}{\varepsilon_g} \frac{a_g}{a_p} \frac{J'_{11}}{J_{11}} (J_{22} N_{21} - J_{21} N_{22}) + (J'_{21} N_{22} - J_{22} N'_{21}) \\ + \frac{(J'_{33} N'_{32} - J'_{32} N_{33})}{(J_{33} N_{32} - J_{32} N_{33})} = 0. \quad (14)$$

Dabei sind die Abkürzungen verwendet:

$$\begin{aligned} J_{11} &= J_l(R_p a_p), \\ J_{21} &= J_l(R_p a_g), \\ J_{22} &= J_l(R_g a_g), \\ J_{32} &= J_l(R_g a_0), \\ J_{33} &= J_l(R_r a_0). \end{aligned} \quad (15)$$

Entsprechend lauten die Größe N und die örtlichen Ableitungen J' und N' .

2. Eigenwertänderungen durch ein homogenes Plasma

Die Lösungen

$$a_0 R_r = \sqrt{(k_0 R_r)^2 - n^2 (\pi R_r / L_r)^2}, \quad (16)$$

die die Eigenwertgleichungen erfüllen, werden auf den Eigenwert $k_0 R_r$ umgerechnet und normiert auf den Anfangswert $[k_0 R_r]_0$ bei $(\omega_p/\omega)^2 = 0$ dargestellt.

Damit läßt sich für den normierten Eigenwert schreiben

$$k_0 R_r / [k_0 R_r]_0 = \omega / \omega_0, \quad (17)$$

wobei ω_0 die Resonanzfrequenz des leeren Resonators ist und für die Resonanzfrequenzänderung gilt

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0. \quad (18)$$

Die Lösungen der Eigenwertgleichungen (13) und (14) wurden numerisch bestimmt.

Die Gln. (13) und (14) vereinfachen sich für die glasfreie Anordnung ($\varepsilon_g = 1$, $R_g = R_r$) zu den in ⁵ angegebenen Gleichungen.

Für unendlich gut leitende Innenfüllungen $[(\omega_p/\omega)^2 \rightarrow \infty \text{ oder } \varepsilon_p \rightarrow -\infty]$ wird aus den Gln. (13) und (14)

$$\text{TE: } J_l'(x) N_l'(x R_p/R_r) - J_l'(x R_p/R_r) N_l'(x) = 0, \quad (19)$$

$$\text{TM: } J_l(x) N_l(x R_p/R_r) - J_l(x R_p/R_r) N_l(x) = 0. \quad (20)$$

Die Lösungen $x = k_0 R_r$ dieser Gleichungen ergeben die Eigenwerte von Koaxialresonatoren ¹⁵; die Lösungen sind in ¹⁶ tabelliert.

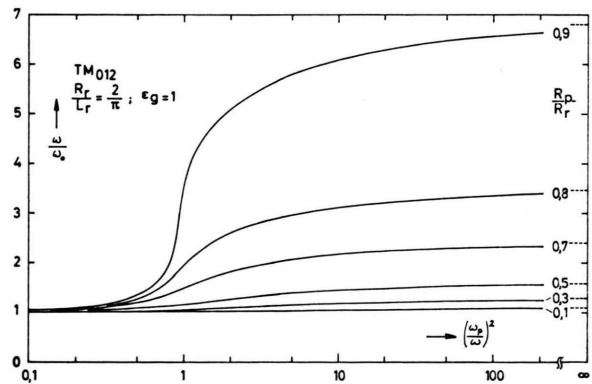


Abb. 3. Normierte Eigenwerte ω/ω_0 eines TM_{012} -Resonators als Funktion der normierten Plasmaelektronendichte $(\omega_p/\omega)^2$ ohne Berücksichtigung eines Plasmabehälters.

Als Beispiel für die Änderung des Eigenwerts eines Hohlraumresonators durch ein homogenes Plasma sind in Abb. 3 die normierten Eigenwerte ω/ω_0 als Funktion der normierten Plasmadichte $(\omega_p/\omega)^2$ für einen TM_{012} -Resonator und in Abb. 4 für einen TM_{210} -Resonator dargestellt.

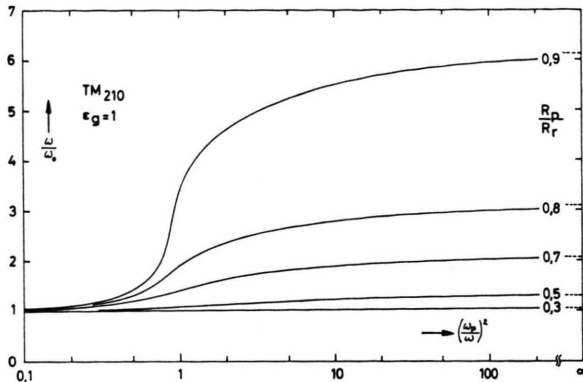


Abb. 4. Normierte Eigenwerte ω/ω_0 eines TM_{210} -Resonators als Funktion der normierten Plasmadichte $(\omega_p/\omega)^2$ ohne Berücksichtigung eines Plasmabehälters.

Parameter ist das Radienverhältnis R_p/R_r ; die Kurven gelten für eine glasfreie Anordnung ($\epsilon_g = 1$). Für unendlich gut leitende Innenfüllungen ergeben sich die bei $(\omega_p/\omega)^2 \rightarrow \infty$ eingetragenen Eigenwerte eines Koaxialresonators. Die Absolutbeträge der Eigenwerte bei $(\omega_p/\omega)^2 = 0$ betragen für den TM_{012} -Resonator $(k_0 R_r)_0 = 4,6693$ und für den TM_{210} -Resonator $(k_0 R_r)_0 = 5,1356$.

3. Eigenwertänderungen durch den Plasmabehälter

Abbildung 5 zeigt den Einfluß des Plasmabehälters auf den Eigenwert des TM_{110} -Resonanzzustandes als Funktion des normierten Behälterradius R_g/R_r . Die bezogene Plasmabehälterwandstärke $\Delta R/R_r = (R_g - R_p)/R_r$ in den vier Teilabbildungen ist 0,04; 0,07; 0,1; 0,2. Parameter ist die Dielektrizitätskonstante des Behälters, die zwischen den Werten $\epsilon_g = 1$ und $\epsilon_g = 10$ verändert ist.

In Abb. 6 ist für den TM_{210} -Modus der Einfluß eines Glas- ($\epsilon_g = 4,6$) und eines Quarzentladungsgefäßes ($\epsilon_g = 3,7$) auf den Eigenwert $k_0 R_r$ bzw. ω/ω_0 des Resonators dargestellt. Der normierte Gefäßaußendurchmesser liegt zwischen $R_g/R_r = 0 \dots 0,8$, die normierte Wandstärke ist $\Delta R/R_r = 0,03; 0,04; 0,05$. Abbildung 7 zeigt die Eigenwerte $k_0 R_r$ ver-

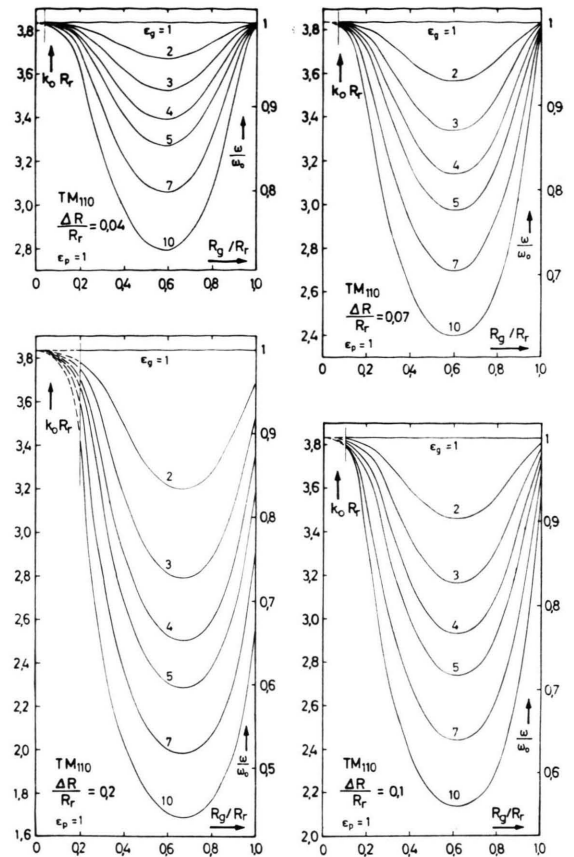


Abb. 5. Eigenwerte $k_0 R_r$ bzw. ω/ω_0 eines TM_{110} -Hohlraumresonators als Funktion des bezogenen Gefäßradius R_g/R_r . Die bezogene Plasmabehälterwandstärke beträgt $\Delta R/R_r = 0,04; 0,07; 0,1; 0,2$. Die Dielektrizitätskonstante des Entladungsgefäßes liegt zwischen $\epsilon_g = 1$ und $\epsilon_g = 10$.

schiedener Resonanzmoden als Funktion des normierten Gefäßradius R_g/R_r . Parameter ist die Dielektrizitätskonstante mit $\epsilon_g = 1; 3,7; 4,6$. Die Wandstärke ist $\Delta R/R_r = 0,04 = \text{const}$; das Verhältnis Resonatorradius zu Resonatorlänge ist $R_r/L_r = 2/\pi$ für die Resonanzmoden mit einem Index $n \neq 0$.

4. Eigenwertänderungen durch ein Plasma in einem Entladungsgefäß

Wird das Entladungsgefäß bei der Berechnung der Eigenwerte berücksichtigt, so ergeben sich für den TM_{110} -Resonator die in Abb. 8 dargestellten Kurven. Die relative Behälterwandstärke $\Delta R/R_r$ liegt zwischen 0,03 und 0,05. Der Wert $\Delta R/R_r = 0$ entspricht einer glas- bzw. quarzfreien Anordnung.

Der normierte Plasmaradius R_p/R_r beträgt 0,3; 0,6; 0,8.

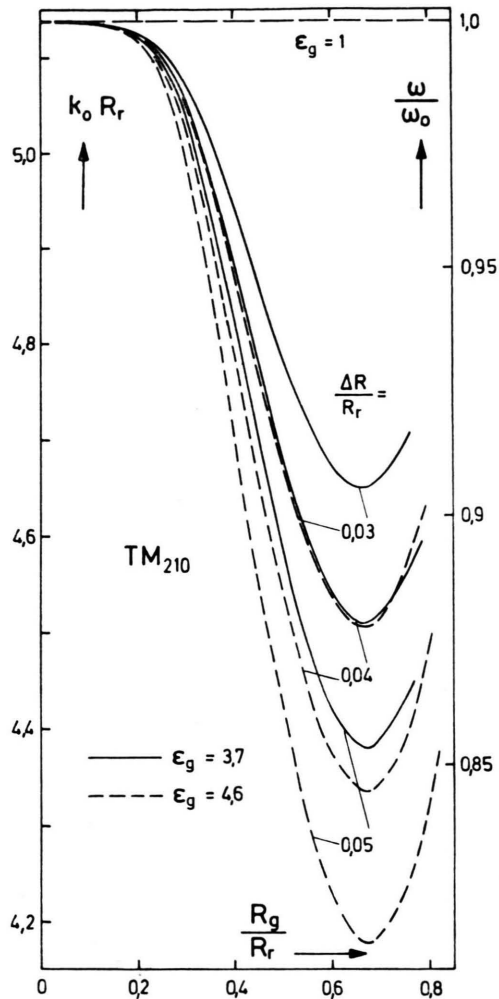


Abb. 6. Eigenwerte $k_0 R_r$ bzw. ω/ω_0 eines TM_{210} -Resonators unter dem Einfluß eines Glas- ($\epsilon_g=4,6$) bzw. Quarzentladungsgefäßes ($\epsilon_g=3,7$) als Funktion des bezogenen Gefäß-Außendurchmessers R_g/R_r . Die normierte Wandstärke beträgt $\Delta R/R_r=0,03; 0,04; 0,05$.

Abb. 7. Eigenwerte $k_0 R_r$ verschiedener Resonanzmoden als Funktion des normierten Gefäßradius R_g/R_r mit der Dielektrizitätskonstanten ϵ_g als Parameter. Die Behälterwandstärke ist $\Delta R/R_r=0,04$, das Verhältnis $R_r/L_r=2/\pi$ für die Resonanzmoden mit dem Index $n \neq 0$.

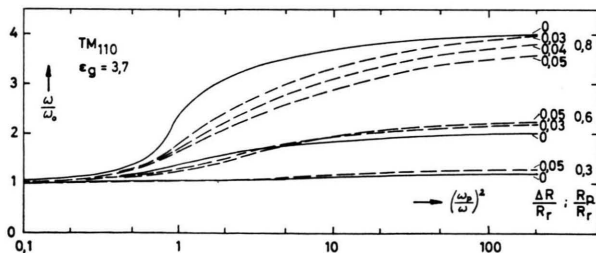
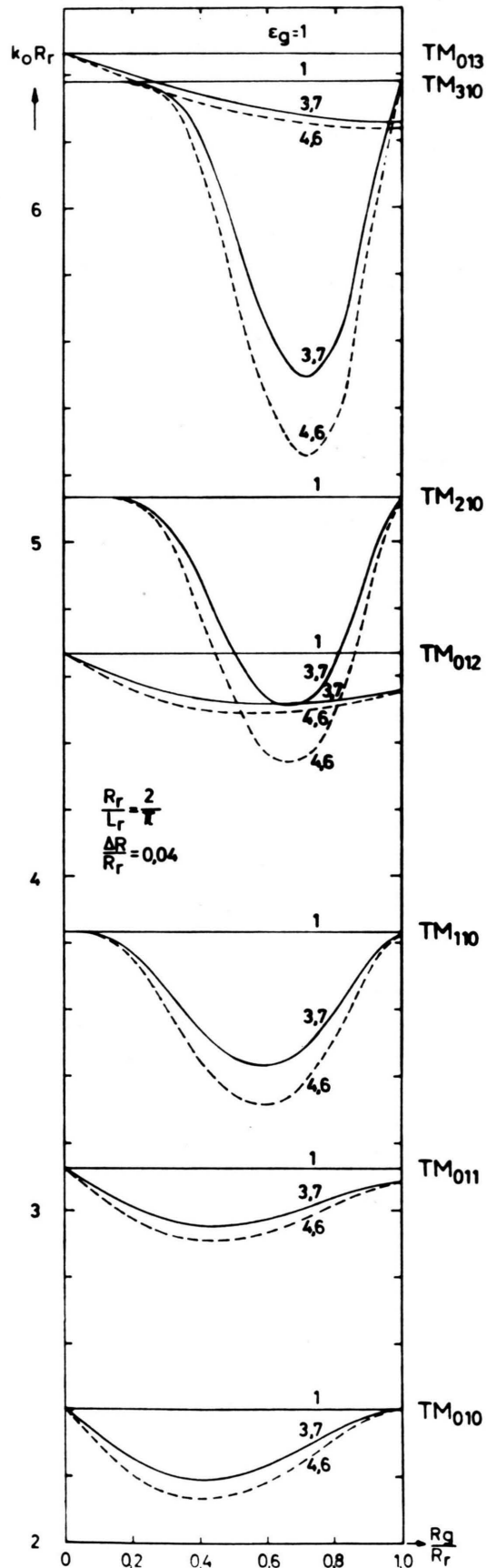


Abb. 8. Normierte Eigenwerte ω/ω_0 eines TM_{110} -Resonators als Funktion der normierten Plasmadichte $(\omega_p/\omega)^2$. Die bezogene Behälterwandstärke $\Delta R/R_r$ liegt zwischen 0 und 0,05 für die normierten Plasmaradien $R_p/R_r=0,3; 0,6; 0,8$.

5. Exakte Theorie – Störungstheorie

Kann vorausgesetzt werden, daß die Störung der elektrischen oder magnetischen Feldverteilung im Resonator durch einen in den Hohlraum eingebrachten Stoff gering ist, so läßt sich mit gutem Erfolg eine linearisierte Theorie, die Störungstheorie, zur Berechnung der auftretenden Eigenwertänderungen heranziehen¹⁷⁻¹⁹. Es gilt hierbei zwischen der normierten Frequenzverschiebung $\Delta\omega/\omega_0$ und der normierten Plasmaelektronendichte $(\omega_p/\omega)^2$ der lineare Zusammenhang

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \Phi \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2. \quad (19)$$

Die Störungstheorie beschreibt den Anfangsteil der Kurven $\omega/\omega_0 = f[(\omega_p/\omega)^2]$ der exakten Lösung in der Nähe des Punktes $(\omega_p/\omega)^2 = 0$.

Zwischen dem Geometriefaktor Φ bzw. F ²⁰⁻²² aus der Störungstheorie und dem normierten Eigenwert ω/ω_0 besteht die Beziehung

$$\Phi = \frac{(\omega/\omega_0 - 1)}{(\omega_p/\omega)^2}, \quad \text{wenn } (\omega_p/\omega)^2 \ll 1. \quad (20)$$

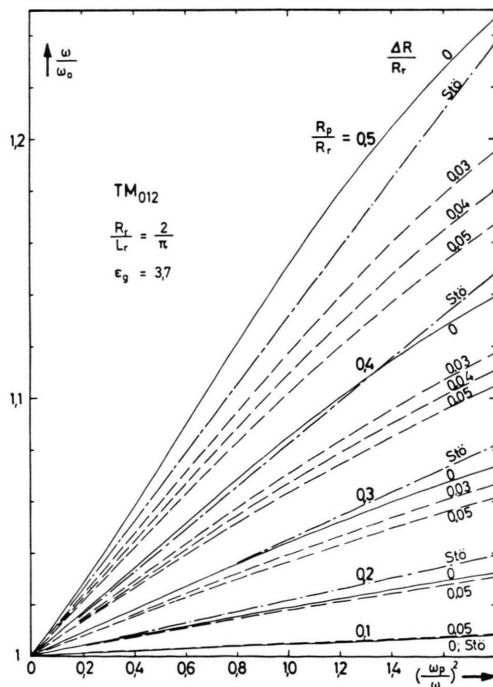


Abb. 9. Normierte Eigenwerte ω/ω_0 eines TM_{012} -Resonators als Funktion der normierten Plasmadichte $(\omega_p/\omega)^2$. Parameter sind das Radienverhältnis R_p/R_r und die Wandstärke des Quarzentladungsgefäßes. Werte aus der Störungstheorie sind strichpunktiert gezeichnet.

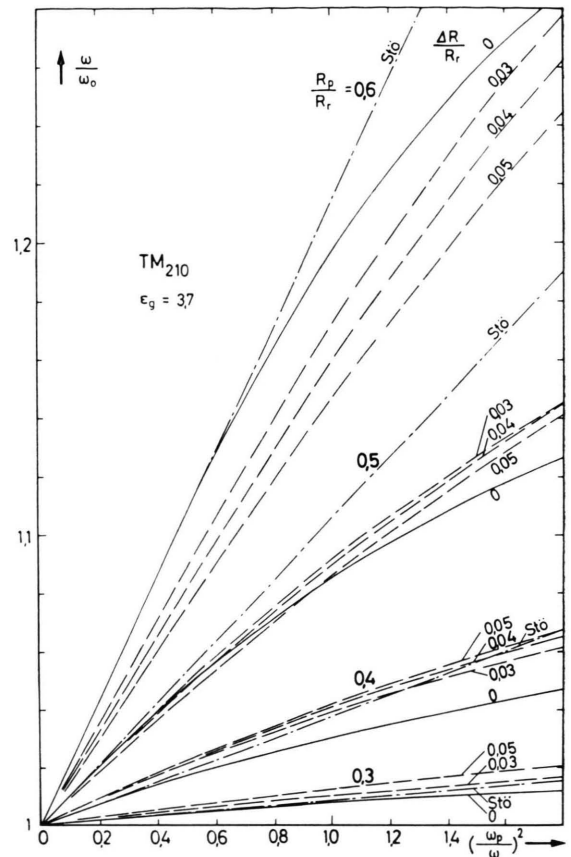


Abb. 10. Normierte Eigenwerte ω/ω_0 eines TM_{210} -Resonators als Funktion der normierten Plasmadichte $(\omega_p/\omega)^2$. Parameter sind das Radienverhältnis R_p/R_r und die Wandstärke des Quarzentladungsgefäßes. Werte aus der Störungstheorie sind strichpunktiert gezeichnet.

Die Abb. 9 bis 11 zeigen die normierten Eigenwerte ω/ω_0 in Abhängigkeit von der normierten Plasmaelektronendichte $(\omega_p/\omega)^2$ für die Resonanzmoden TM_{012} , TM_{210} und TM_{020} . Neben der exakten Lösung für Plasmen ohne Behälter (durchgezogene Linien) sind die Eigenwerte der Resonatoren mit Plasmen in Quarzgefäßen mit bezogenen Wandstärken $\Delta R/R_r = 0,03$; $0,04$; $0,05$ angegeben (gestrichelte Linien).

Die Ergebnisse der Störungstheorie sind strichpunktiert eingetragen.

In der Nähe des Nullpunktes bilden die aus der linearen Störungstheorie bestimmten Geraden die Tangente an die Kurven der exakten Lösung, wenn hierbei kein Behälter berücksichtigt ist.

Wird das Entladungsgefäß in die Berechnung einbezogen, so ergeben sich auch für geringe Plasmadichten Abweichungen von der Näherungslösung.

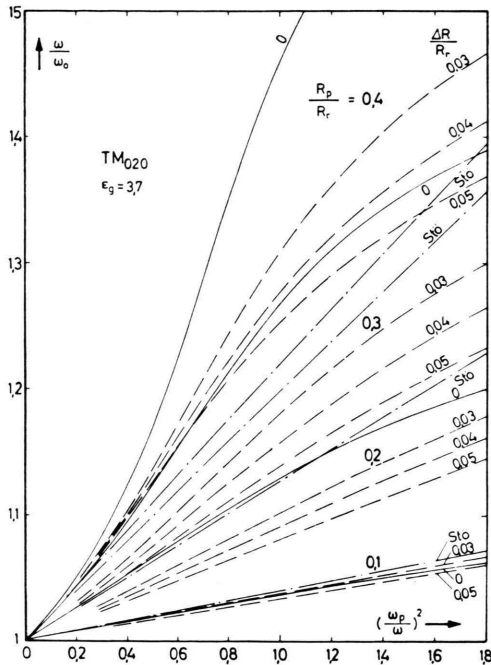


Abb. 11. Normierte Eigenwerte ω/ω_0 eines TM_{020} -Resonators als Funktion der normierten Plasmadichte $(\omega_p/\omega)^2$. Parameter sind das Radienverhältnis R_p/R_r und die Wandstärke des Quarzentladungsgefäßes. Werte aus der Störungstheorie sind strichpunktirt gezeichnet.

In Abb. 12 sind die normierten Eigenwerte ω/ω_0 als Funktion der normierten Plasmaelektronendichte $(\omega_p/\omega)^2$ für das Radienverhältnis $R_p/R_r = 0,3$ und die Behälterwandstärke $\Delta R/R_r = 0,05$ für verschiedene Resonanzmoden angegeben. Die durchgezogenen Kurven sind für Quarzentladungsgefäße, die gestrichelten für Entladungsgefäße aus Glas berechnet; Ergebnisse der Störungstheorie sind wieder strichpunktirt gezeichnet.

Eine gestrichelte Linie $\delta = R_p$ beim Wert $(\omega_p/\omega)^2 = 1,52$ gibt die maximale Elektronendichte an, bis zu der eine Hohlraumresonatormessung sinnvoll ist: δ ist die Eindringtiefe des elektrischen Feldes in das Plasma; $\delta = R_p$ bedeutet, daß das Mikrowellenfeld noch die ganze Plasmasäule durchdringen kann. Der Bestimmung des Dichtewertes in Abb. 12 ist eine Mikrowellenfrequenz $f = 10$ GHz und ein Resonatorradius $R_r = 2,25$ cm zugrunde gelegt.

Berücksichtigt man die Abweichung der Näherungslösung [Gl. (19)] von der exakten Lösung, so läßt sich der Geometriefaktor durch einen Faktor K korrigieren; damit gilt

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \Phi K \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2. \quad (21)$$

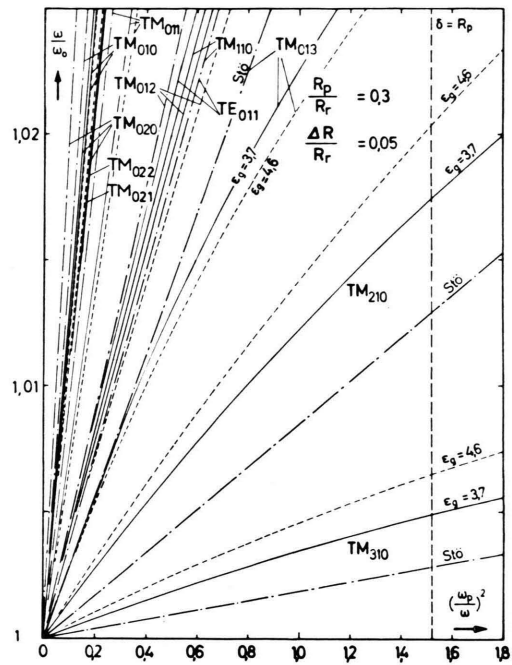


Abb. 12. Normierte Eigenwerte ω/ω_0 verschiedener Resonanzmoden als Funktion der normierten Elektronendichte $(\omega_p/\omega)^2$ mit Quarz- (durchgezogene Linien) und Glasentladungsgefäßen (gestrichelte Linien). Ergebnisse der Störungstheorie sind strichpunktirt gezeichnet. Die normierten Werte des Plasmadurchmessers bzw. der Wandstärke sind 0,3 bzw. 0,05.

Dieser Korrekturfaktor K ist für den TM_{010} -Modus in Abb. 13 für verschiedene Radienverhältnisse R_p/R_r und ohne Plasmabehälter ($\epsilon_g = 1$) als Funktion der normierten Dichte $(\omega_p/\omega)^2$ angegeben. Die Kurve $\delta = R_p$ zeigt wieder den physikalisch sinnvollen Anwendungsbereich des Korrekturfaktors.

Für Plasmadichten $(\omega_p/\omega)^2 \leq 2,5$ gibt Abb. 14 den Korrekturfaktor K für den TM_{110} -Modus wieder. Hierbei sind neben den Werten für die glasfreie Anordnung auch die Werte für Plasmasäulen in Glas- bzw. Quarzentladungsgefäßen angegeben.

Für genaue Messungen und weite Gültigkeit der linearen Störungstheorie sind nach dieser Darstellung Quarz-Entladungsgefäße mit bezogenen Außenradien $R_g/R_r \approx 0,4$ und Innenradien $R_p/R_r \approx 0,35$ zu empfehlen, während dünne Plasmasäulen mit dem Entladungsgefäß bei der Anwendung der Geometriefaktoren aus der Störungstheorie Fehler von 20% bis 30% verursachen.

Bei jedem Resonanzmodus liegen die für die Anwendung der Störungstheorie günstigen Radienbereiche der Entladungsgefäße bei anderen Werten, doch kann verallgemeinernd gesagt werden, daß Ge-

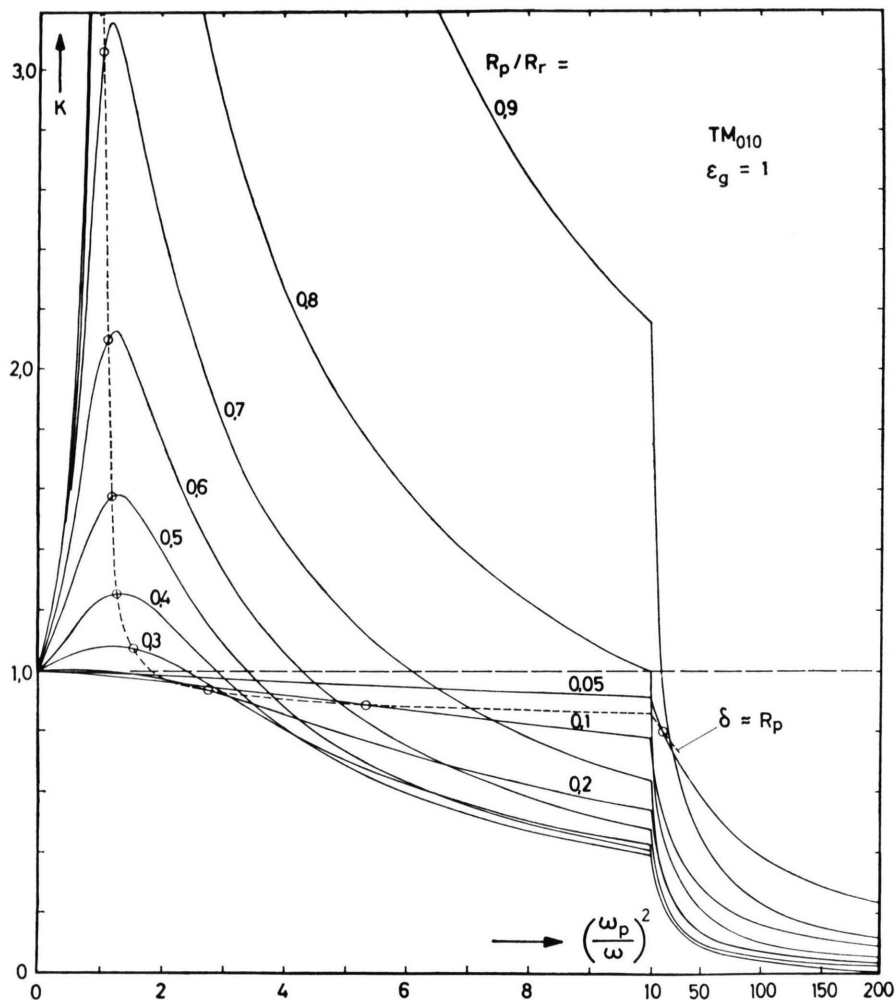
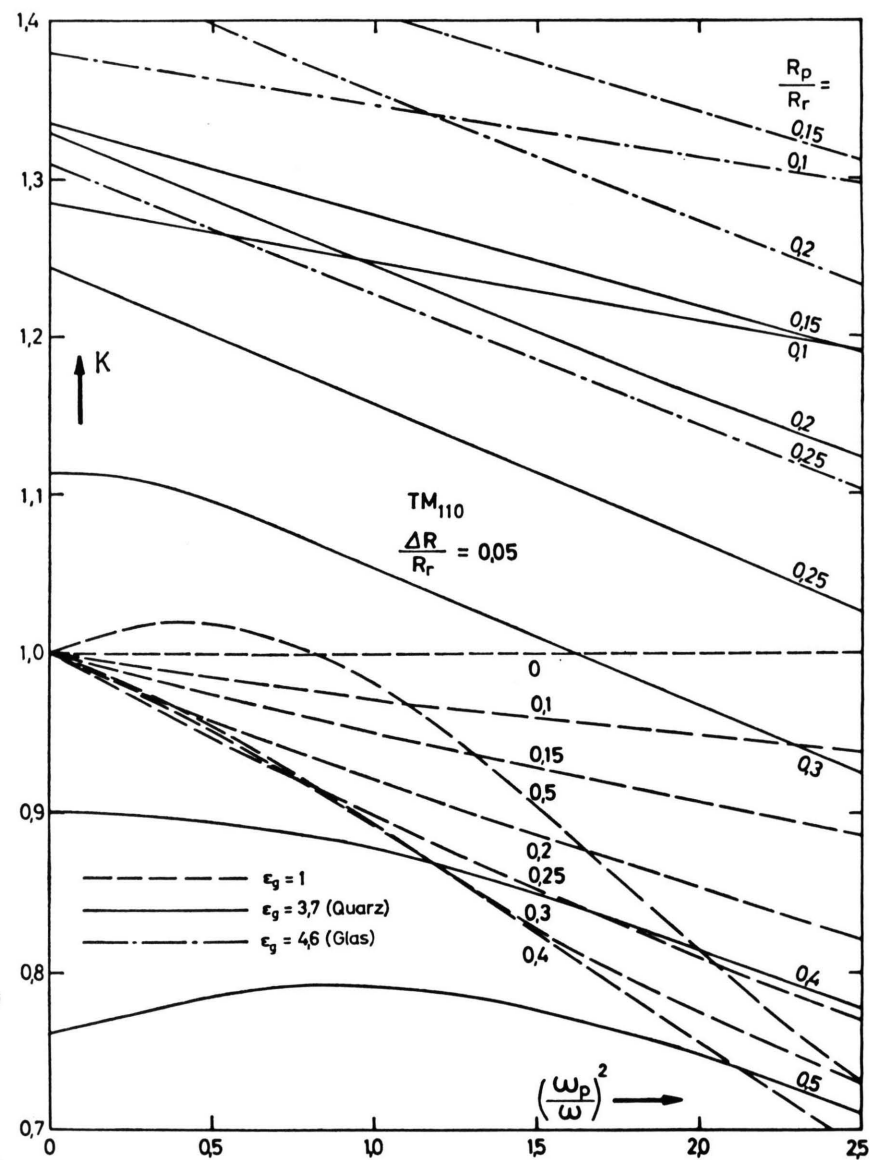


Abb. 13. Korrekturfaktor K des Geometriefaktors Φ für den TM_{010} -Modus als Funktion der normierten Elektronendichte $(\omega_p/\omega)^2$. Parameter ist das Radienverhältnis R_p/R_r . ($\epsilon_g = 1$; δ ist die Eindringtiefe.)

Abb. 14. Korrekturfaktor K des Geometriefaktors Φ für den TM_{110} -Modus als Funktion der normierten Elektronendichte $(\omega_p/\omega)^2$. Parameter sind die Dielektrizitätskonstante ϵ_g des Entladungsgefäßes und das Radienverhältnis R_p/R_r .



fäße und Resonanzmoden so gewählt werden sollten, daß die Gefäßwand in Gebiete geringer elektrischer Mikrowellenfeldstärke zu liegen kommt.

6. Zusammenfassung

In einer exakten Theorie wird die Eigenwertgleichung für eine Plasma-Plasmabehälteranordnung in einem kreiszylindrischen Mikrowellen-Hohlraumresonator für TM_{lm0} , TM_{0mn} , TE_{0mn} -Resonanzmoden aufgestellt und numerisch gelöst. Das Profil des Plasmas wird dabei als homogen über den Radius und die Gefäßachse angenommen.

Die aus der linearen Störungstheorie des Hohlraumresonators ableitbaren Proportionalitätsfaktoren zwischen der Elektronendichte und der Resonanzfrequenzänderung werden mit den exakt berech-

neten Eigenwertänderungen verglichen. Hieraus kann der Gültigkeitsbereich der linearisiert berechneten Proportionalitätsfaktoren (Geometriefaktoren) entnommen werden.

Wird bei der Berechnung der Eigenwertänderungen des Resonators das Entladungsgefäß berücksichtigt, so zeigt sich, daß die Größe des Geometriefaktors und damit die Meßempfindlichkeit verändert wird. Mit Hilfe von Korrekturfaktoren kann der Einfluß des Entladungsgefäßes auf die Meßempfindlichkeit berücksichtigt werden.

Herrn Professor Dr. W. KLUGE sei für sein förderndes Interesse an der Arbeit gedankt; Fräulein M. HERRMANN und Herrn N. RUHS danke ich für ihre freundliche Unterstützung bei der numerischen Lösung der Eigenwertgleichungen.

- ¹ S. J. BUCHSBAUM u. S. C. BROWN, Phys. Rev. **106**, 196 [1957].
- ² S. J. BUCHSBAUM, L. MOWER u. S. C. BROWN, Phys. Fluids **3**, 806 [1960].
- ³ B. C. GREGORY, Canad. J. Phys. **46**, 2281 [1968].
- ⁴ F. F. CHEN, C. ETIEVANT u. D. MOSHER, Phys. Fluids **11**, 811 [1968].
- ⁵ B. AGDUR u. B. ENANDER, J. Appl. Phys. **33**, 575 [1962].
- ⁶ J. L. SHOHET, MATT-390.
- ⁷ J. L. SHOHET, J. Appl. Phys. **37**, 3775 [1966].
- ⁸ J. L. SHOHET u. C. MOSKOWITZ, J. Appl. Phys. **36**, 1756 [1965].
- ⁹ K. I. THOMASSEN, J. Appl. Phys. **36**, 3642 [1965].
- ¹⁰ P. LUKÁČ, J. Phys. D **1**, 1495 [1968].
- ¹¹ P. HEDVALL, Ericsson Technics **1**, 98 [1963].

- ¹² J. L. SHOHET u. A. J. HATCH, J. Appl. Phys. **41**, 2610 [1970].
- ¹³ H. A. BLEVIN u. J. A. REYNOLDS, J. Appl. Phys. **40**, 3899 [1969].
- ¹⁴ G. JANZEN, Dissertation, Universität Stuttgart 1971.
- ¹⁵ J. P. KINZER u. I. G. WILSON, Bell Syst. Techn. J. **26**, 410 [1947].
- ¹⁶ E. JAHNKE, F. EMDE u. F. LÖSCH, Tafeln höherer Funktionen, Teubner, Stuttgart 1960.
- ¹⁷ J. MÜLLER, Hochfrequenz El. Akustik **54**, 157 [1939].
- ¹⁸ J. C. SLATER, Rev. Mod. Phys. **18**, 441 [1946].
- ¹⁹ R. A. WALDRON, Proc. IEE **107** c, 272 [1960].
- ²⁰ G. JANZEN, Z. Naturforsch. **24 a**, 1496 [1969].
- ²¹ G. JANZEN, Z. Naturforsch. **26 a**, 1264 [1971].
- ²² G. JANZEN, Bericht IPF-71-5, Institut für Plasmaforschung, Universität Stuttgart 1971.